La nozione di spazio in Matematica

Marco Benini

School of Mathematics, University of Leeds
Woodhouse Lane, Leeds, LS2 9JT, UK
M.Benini@leeds.ac.uk

Dipartimento di Scienze Teoriche e Applicate
Università degli Studi dell'Insubria
via Mazzini 5, 21100, Varese, Italia
marco.benini@uninsubria.it

Sommario: Questo articolo si propone di ripercorrere l'evoluzione dell'idea di spazio in Matematica da Euclide a Grothendieck. In particolare, si vogliono enfatizzare i principi che, dietro le quinte, hanno dato origine alle differenti concezioni che si sono succedute e accavallate nel tempo.

L'esposizione è, nei limiti delle capacità dell'autore, divulgativa e, almeno nelle intenzioni, la parte tecnica è ridotta al minimo, cercando di supplire con l'intuizione anche a costo di qualche semplificazione.

Introduzione

Questo lavoro intende dare una panoramica dello sviluppo del concetto di spazio nell'ambito della Matematica. Sebbene la traccia di massima sia storica, anche se ci permetteremo alcune deviazioni dalla presentazione delle idee in ordine temporale ove appropriato, lo scopo primario dell'articolo è introdurre il lettore al concetto di spazio come oggi inteso, in tutta la sua generalità e astrazione.

D'altro canto l'articolo intende anche presentare spunti di riflessione per chi fosse interessato ad approfondire aspetti generalmente trascurati o secondari della storia del pensiero matematico. In questo senso, verranno sottolineati gli aspetti che potrebbero essere interessanti senza alcuna pretesa di profondità o di completezza.

C'era una volta lo spazio

Storicamente si fa risalire la nascita della Matematica a Pitagora (575 a.C. circa) quando egli fondò la propria scuola filosofica, dopo aver appreso le conoscenze degli scribi egizi e assiri. Seppur infatti è oramai appurato che sia le popolazioni dell'antico Egitto, sia le civiltà succedutesi tra il Tigri e l'Eufrate avessero sviluppato sofisticate nozioni di calcolo e avessero intuito e usato i fondamenti della geometria classica, tuttavia Pitagora[1] vi aggiunse un elemento essenziale: la dimostrazione.

Tanto è stato scritto rispetto a questo passaggio fondamentale che definisce il punto d'avvio per la Scienza *esatta* per eccellenza. Per una panoramica elementare si veda, ad esempio, (Boyer 1991) (Kline 1972).

L'aspetto che è di interesse per questo lavoro è, invece, che la scuola pitagorica si interessò principalmente di geometria, ovvero dello studio dello spazio a due o tre dimensioni. In realtà tutta la matematica greca è, in buona sostanza, geometria: infatti l'aritmetica, dovuta principalmente ai pitagorici[2] è poco più della nostra aritmetica elementare, priva com'è di un raffinato sistema di rappresentazione simbolico delle quantità e di strumenti di calcolo efficaci. Non mancano risultati notevolissimi, come il Teorema di Euclide, che stabilisce che l'insieme dei numeri primi è infinito. Tuttavia resta evidente che la *Matematica maggiore* per i greci antichi coincide con la geometria.

[1] O, più probabilmente, i membri della sua scuola.
[2] Può apparire sorprendente che si dica che i pitagorici furono principalmente dei geometri, quando affermavano che tutto è numero. In realtà la loro idea di numero corrisponde al nostro numero naturale e la manipolazione numerica è svolta principalmente con metodi geometrici.

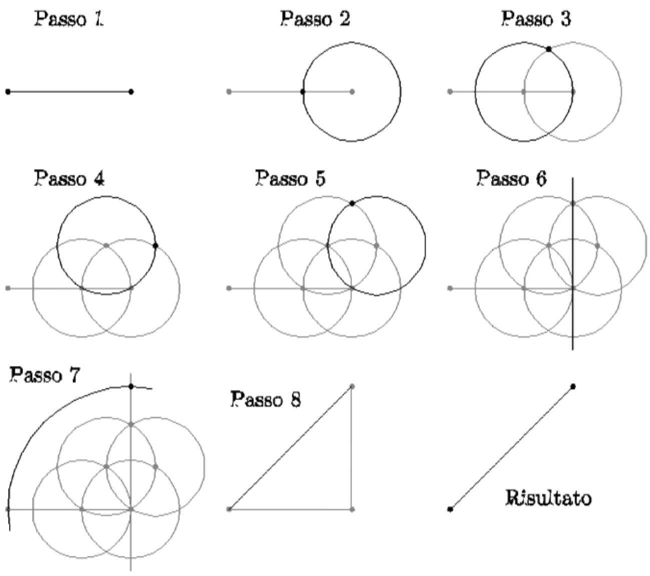

Figura 1: Calcolo della radice quadrata di 2.

La geometria classica

La geometria di Euclide, che formalizza nella sua opera[3] "gli Elementi" in modo sommo la struttura portante della matematica greca, è uno studio dello spazio e delle proprietà degli oggetti che in esso possono trovare posto.

Per stabilire senza ambiguità la natura dell'oggetto di studio, Euclide enunciò un insieme di postulati e assiomi che, nella sua idea, coglievano in modo univoco e logicamente coerente la struttura dello spazio geometrico, inteso come una idealizzazione di quello fisico. Quindi, gli assiomi e i postulati de "gli Elementi" definiscono sia le proprietà di base dello spazio, sia gli oggetti di interesse. Gli oggetti di studio sono cerchi e rette e le loro sotto-parti, intesi come astrazione di ciò che è possibile disegnare con riga e compasso. Di queste entità, e delle loro composizioni, le figure, si è interessati agli angoli, alle lunghezze e alle aree, quantità definite per via assiomatica.

Vale la pena notare, senza approfondire, che Euclide non dice cosa sia lo spazio esplicitamente, ma lo formalizza attraverso le proprietà delle figure. Inoltre le figure formate da rette (segmenti) e cerchi godono di uno status privilegiato in quanto esse sono il principale argomento di studio e esse sono usate per scrivere gli assiomi.

Tra i vari postulati, il più importante è il quinto[4], il postulato delle "parallele", che afferma che, data una retta e un punto fuori da essa, per tale punto passa una e una sola retta parallela alla retta data.

Un fatto poco rimarcato nello studio moderno della geometria classica è che questa è sia uno strumento concettuale di modellazione del mondo fisico, sia uno strumento effettivo di calcolo.

Nella prima declinazione vale la pena rammentare che, per il mondo greco, la Matematica, e la Geometria in special modo, è parte della Filosofia: anzi, in un certo senso, ne rappresenta la parte più "alta", l'ideale verso cui tendere. È anche molto interessante notare come i greci erano ben consci delle difficoltà del loro sistema: la scoperta degli incommensurabili ad opera della scuola pitagorica, i paradossi di Zenone, i problemi della quadratura del cerchio, della trisezione dell'angolo e della duplicazione del cubo, oltre ai metodi "analitici" di Archimede e alle curve "meccaniche" degli ellenisti, rivelano che i greci avessero compreso la necessità di riflettere sui fondamenti della disciplina e, in parte, ne conoscevano i limiti concettuali pur non disponendo ancora del bagaglio culturale atto a comprenderne la natura.

Gli stessi problemi rivelano come la geometria fosse anche uno strumento di calcolo e piuttosto raffinato. Chiedersi quale sia l'area di un cerchio dato il raggio, pur sapendo[5] che è pari a πr^2, è una domanda non oziosa: la domanda

[3] Per quest'opera ci riferiremo all'edizione (Euclide, The Thirteen Books of The Elements: Volume 1: Books 1 and 2 2000) (Euclide, The Thirteen Books of The Elements: Volume 2: Books 3 to 9 2000) (Euclide, The Thirteen Books of The Elements: Volume 3: Books 10 to 13 2000) in quanto di facile reperimento e rigorosamente vicina all'originale.

[4] Il metro di valutazione dell'importanza è per le conseguenze future sull'idea di spazio. Occorre comunque sottolineare che anche i greci guardarono sempre con cautela a questo postulato, l'unico che richiamasse una nozione di infinito.

correttamente esplicitata è per una procedura, una costruzione o, in termini moderni, un algoritmo basato sulle operazioni fondamentali del tracciamento di rette e cerchi, che permetta di calcolare esattamente l'area di un cerchio noto il raggio, ovvero di disegnare un quadrato avente come area esattamente quella del cerchio dato un segmento lungo quanto il raggio.

Per dare un'idea del sistema di calcolo dei greci, possiamo illustrare il metodo di estrazione delle radici quadrate: dato un segmento di lunghezza x vogliamo calcolare $\sqrt{x}$, ovvero trovare un segmento avente tale lunghezza. Nel caso $x = 2$ il calcolo avviene seguendo i passi illustrati in figura 1, partendo da un segmento di lunghezza pari alla metà di x, in cui, a ogni passo, disegniamo un cerchio di centro e raggio noti, oppure una retta passante per due punti[6]. Per il caso generale i greci non avevano una procedura sistematica, ma l'idea era la medesima: cercare di costruire un triangolo rettangolo (passo 7) la cui somma dei quadrati costruiti sui lati fosse uguale a x, e quindi tracciare l'ipotenusa di tale triangolo. Questo ha dato origine allo studio dei numeri "triangolari", "quadrati", ecc., si veda (Conway e Guy 1996).

Il lungo periodo greco e la raffinatezza dei risultati, la cui profondità è sorprendente, hanno, di fatto, reso la geometria classica un ideale che è perdurato intatto per lunghissimo tempo, fino al pieno Rinascimento. Infatti la concezione di spazio, ancora oggi, viene associata allo spazio euclideo, salvo che nel ristretto dominio dei matematici.

Cartesio e la rinascita della geometria

René Descartes ebbe la fondamentale intuizione per generalizzare correttamente la geometria classica senza perderne il vasto patrimonio di risultati, ma dando un nuovo spessore e una più profonda interpretazione della geometria. Questa generalizzazione è stata possibile solo grazie agli enormi sviluppi dell'algebra elementare ad opera degli arabi, dei matematici italiani e della crescita di una diffusa comunità matematica in Europa (per lo sviluppo storico si veda (Kline 1972)).

Nel caso del piano, l'idea è semplicemente associare a ogni punto una coppia di coordinate, costituite da due numeri reali, date come distanze da un'unica origine lungo due assi di riferimento. Apparentemente si tratta di una rappresentazione ovvia, ma, in realtà, vi è un profondo salto concettuale che vale la pena esplicitare. In primo luogo, rette e cerchi, intesi come luoghi di punti[7], sono esprimibili in modo sintetico come equazioni tra coordinate: una retta è l'insieme dei punti le cui coordinate soddisfano una equazione polinomiale di primo grado in due variabili; analogamente un'equazione polinomiale di secondo grado determina univocamente una conica ed è facilmente controllabile se la curva risultante sia una parabola, un'iperbole, una ellisse o un cerchio.

In realtà una semplice generalizzazione permette di definire molte curve che difficilmente trovano posto nella geometria di Euclide come tutte le equazioni polinomiali di ordine superiore al secondo oppure le curve esponenziali o logaritmiche, le curve razionali (frazioni di polinomi), trigonometriche, … Proprio nella generalità del nuovo concetto di curva, uniformemente equiparato al concetto di equazione[8], risiede la prima grande novità della geometria cartesiana.

La seconda grande novità è nella concezione stessa dello spazio: questi è un insieme di punti dotato di una struttura. Anche nella geometria euclidea era così, naturalmente, ma la struttura era implicita negli assiomi. Invece nella geometria cartesiana la struttura è resa esplicita, dicendo che ogni punto è un coppia ordinata di numeri reali. L'esplicitazione della struttura consente di generalizzare il concetto di spazio semplicemente aumentando la quantità di numeri necessari a caratterizzare i punti[9]: in questo modo possiamo avere spazi a n dimensioni, per ogni n naturale.

La terza grande novità è l'abbandono della centralità delle costruzioni con riga e compasso. Di necessità questo passaggio concettuale maggiore si riflette nell'esigenza di un sistema di calcolo più sofisticato, destinato a trattare le equazioni invece delle figure geometriche. Proprio grazie allo sviluppo dell'algebra che oggi chiamiamo elementare, diventa possibile usare la geometria cartesiana. Quindi la geometria smette di essere una "macchina da calcolo",

[5] In questo caso, occorre comprendere che effettuare la moltiplicazione per una costante, π, di cui si conosce solo un valore approssimato è una procedura adeguata per l'applicazione pratica ma insoddisfacente per la teoria.

[6] La costruzione oggi viene insegnata nei corsi di disegno tecnico e annoverata sotto il termine "geometria descrittiva"; in realtà, all'inizio fu un sistema effettivo di calcolo.

[7] Intendere una curva come un luogo di punti significa che non si tiene conto del processo di tracciamento; se questo fosse rilevante, e talora lo è, allora la stessa curva può essere rappresentata come luogo di punti in uno spazio con una dimensione in più, il tempo.

[8] Nel senso che le curve "trattabili" nel sistema geometrico cartesiano sono gli oggetti rappresentabili mediante un sistema di equazioni in un qualche sistema fissato di funzioni di base, ad esempio i polinomi, oppure le funzioni razionali con l'aggiunta delle espressioni trigonometriche e logaritmiche.

[9] Si noti come vi sia una inversione di prospettiva rispetto alla usuale presentazione delle geometria cartesiana: non si rappresenta mediante coordinate uno spazio già noto, ma piuttosto si *definisce* lo spazio mediante la sua rappresentazione.

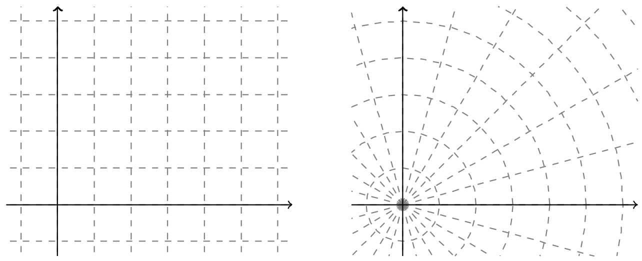

Figura 2: Due diverse rappresentazioni dello stesso spazio: cartesiana e polare.

delegando tale ruolo all'algebra e all'aritmetica che, alla prova dei fatti, si sono dimostrati strumenti più potenti, flessibili ed efficaci.

È opportuno sottolineare come la geometria cartesiana, di fatto, impone un parziale distacco dalla concezione dello spazio matematico come una astrazione dello spazio fisico: infatti, gli spazi a dimensione maggiore di tre non sembrano avere una diretta e percepibile corrispondenza nel mondo fisico, pur essendo perfettamente e uniformemente trattabili dagli strumenti algebrici.

Analisi e algebra

Lo sviluppo dell'analisi matematica, la branca della Matematica nata per studiare le proprietà delle curve nello spazio cartesiano sull'onda della costruzione delle scienze fisiche, dopo le fondamenta di Newton e Liebniz, è prodigioso sia per ampiezza che per profondità di risultati, anche se una rigorosa formalizzazione arriverà solo nel XIX secolo. I metodi analitici hanno senso solo nello spazio cartesiano e portano rapidamente alla luce proprietà di interesse nello studio delle funzioni. In effetti l'analisi matematica complementa la geometria cartesiana, dotandola di tutte quelle proprietà che consentono di studiare in piena profondità le curve che la geometria definisce[10].

In particolare l'idea di *continuità* risulta determinante per dare una presentazione coerente del concetto di limite, idea già presente nei lavori di Archimede (Heath 2009) o nel metodo della "discesa infinita" di Fermat (Boyer 1991). Una curva è continua, intuitivamente, se può essere tracciata con un solo tratto di penna, senza interruzioni di sorta. Il concetto di limite, invece, definisce il valore di una funzione in un punto P come quello che dovrebbe essere se la curva fosse continua ovunque nell'intorno di P. Per le definizioni esatte e per una introduzione non eccessivamente formale all'analisi si rimanda a (Simmons 1996).

Per loro natura i metodi analitici si applicano principalmente a curve continue e, pertanto, per lungo tempo, lo studio dello spazio cartesiano mediante l'analisi ha riguardato solamente le curve continue o con poche discontinuità[11].

Le tecniche analitiche invitano anche lo sviluppo di sistemi di coordinate alternativi rispetto agli assi cartesiani come, ad esempio, le coordinate polari nel piano[12]. Questi sistemi si comportano in modo molto simile alla geometria cartesiana, pur usando talora delle coordinate limitate in alcune componenti; questa similitudine può essere formalizzata, aprendo le porte a una generalizzazione dello spazio cartesiano verso i più astratti spazi vettoriali.

Anche, i metodi analitici suggeriscono alternative per misurare le distanze tra punti rispetto alla distanza euclidea espressa dal Teorema di Pitagora[13]. Ad esempio, usando le coordinate polari risulta più semplice misurare la distanza tra

---

[10] La relazione tra funzioni e curve, ovvero le soluzioni di equazioni, è tecnica e non rilevante nel contesto di questo articolo. Nella terminologia contemporanea sarebbe più appropriato parlare di *varietà*, ma rimandiamo il lettore a testi più tecnici, quali (Cox, Little e O'Shea 2007) per eventuali approfondimenti.

[11] Per comprendere il senso del termine "poche" nella frase, si consideri la funzione tangente trigonometrica: essa presenta infinite discontinuità, a ogni punto $(n + 1/2)\pi$, per ogni n intero. In tali punti la curva tende a infinito, positivo da destra, negativo da sinistra. Ma, ed è questo il senso del dire che tale curva ha poche discontinuità, tra uno di questi punti e il successivo, la curva è continua. Il modo preciso per affermare questo concetto è dire che i punti di discontinuità hanno *misura (di Lebesgue) zero* rispetto ai punti della curva.

[12] Un punto del piano in coordinate polari è determinato da un numero reale che misura la distanza da un punto fissato, l'origine, e da un secondo numero reale che misura l'angolo che la retta che unisce il punto con l'origine forma con una retta di riferimento passante per l'origine. La seconda componente è limitabile all'intervallo $[0,2\pi)$ se si misura l'angolo in radianti.

[13] La distanza euclidea tra i punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è pari a $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}$. Essa è la lunghezza del segmento avente i punti come estremi.

due punti a pari distanza euclidea dall'origine come la lunghezza[14] del minimo arco di cerchio centrato sull'origine che li congiunge piuttosto che usare la corda di tale arco, che misura la loro distanza euclidea. Infatti tale è la misura che si adotta nel calcolo degli integrali in coordinate polari[15], così come tale distanza è alla base della trasformazione che si applica per passare dalle coordinate polari alle usuali coordinate cartesiane. È facile verificare che tale trasformazione che opera su tutti i punti dello spazio è continua e biiettiva[16], un fatto che dice che, sostanzialmente, lo spazio rappresentato in coordinate cartesiane o polari è lo stesso pur essendo raffigurato in modo differente, si veda la figura 2. Questa identificazione, inizialmente concepita come un metodo per semplificare il calcolo degli integrali o per descrivere curve simili ai cerchi e alle ellissi, assume un significato più profondo con lo sviluppo dell'algebra.

Lo sviluppo dell'algebra fu più lento e solo dopo i fondamentali risultati di Galois e Abel nacque l'algebra moderna (Derbyshire 2006) e, in particolare, la nozione di gruppo e di campo: un gruppo è un insieme dotato di una operazione binaria, convenzionalmente chiamata *moltiplicazione*, denotata con $\cdot$, di uno speciale elemento, detto *unità*, denotato con 1, e di una operazione unaria denotata con $^{-1}$, tali che la moltiplicazione sia associativa ($x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$), abbia elemento neutro ($x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$), e inverso per ogni elemento ($x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$); un gruppo è detto *abeliano* se l'operazione è anche commutativa ($x \cdot y = y \cdot x$); un campo è un insieme K dotato di due operazioni binarie $+$ e $\cdot$, di due elementi speciali 0 e 1, di una operazione unaria $-$ e di una operazione unaria parziale $^{-1}$ indefinita per l'elemento 0, tali che l'insieme K formi un gruppo abeliano per $+$, 0, $-$, l'insieme $K \setminus \{0\}$ formi un gruppo abeliano per $\cdot$, 1, $^{-1}$, e che valga la proprietà *distributiva* ($x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$). Grazie a queste nozioni astratte fu possibile formalizzare la nozione moderna di spazio vettoriale (Jacob 1990) come una struttura algebrica pura definita su un campo generico: intuitivamente, uno spazio vettoriale si può pensare come uno spazio cartesiano le cui coordinate hanno valori nel campo[17] e in cui sia possibile sommare punti o moltiplicarli per un valore del campo.

In modo semplice, ogni punto di uno spazio vettoriale è descrivibile da un vettore (non necessariamente finito) di coordinate i cui valori sono nel campo dato; gli "assi" sono una famiglia di punti linearmente indipendenti[18]. Una parte degli strumenti analitici possono essere ridefiniti in modo generalizzato in tali spazi, assumendo solitamente alcune condizioni aggiuntive, come l'esistenza di una nozione di "distanza" dall'origine, detta *norma*.

Gli strumenti analitici possono essere estesi agli *spazi metrici* (Sutherland 2009), ovvero a insiemi per cui sia definita una funzione di distanza tra gli elementi. Tale funzione deve soddisfare alcuni semplici criteri: la funzione distanza $d(x, y)$ a valori reali deve essere sempre maggiore di 0, deve essere pari a 0 solo se gli argomenti sono identici, deve essere simmetrica ($d(x, y) = d(y, x)$) e deve soddisfare la diseguaglianza triangolare (per ogni y, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$).

Sebbene gli spazi metrici e vettoriali siano "spazi", nel senso che essi soddisfano alcune delle proprietà "naturali" che caratterizzano l'idea intuitiva di spazio, fatte le opportune astrazioni, accade che questi spazi siano, in generale, incompatibili. Infatti non tutti gli spazi metrici ammettono una presentazione vettoriale e, vice versa, non tutti gli spazi vettoriali ammettono una coerente funzione di distanza[19]. Non solo, è possibile che uno spazio vettoriale sia dotato di una funzione di distanza la quale non sia ricavabile da una norma (distanza del punto dall'origine), ad esempio sulla retta cartesiana la distanza $d(x, y) = |\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y)|$ non può essere indotta da una norma in quanto non invariante rispetto a traslazioni.

Tuttavia alcuni aspetti strutturali comuni sono rilevabili: due spazi vettoriali sono sostanzialmente indistinguibili quando esiste tra essi una funzione biiettiva lineare, ovvero che preservi somme di vettori e prodotti per scalari; due

[14] Equivalentemente come l'angolo espresso in radianti tra i due punti. Incidentalmente questo è il motivo per cui si preferisce la misura in radianti rispetto ai più familiari gradi.

[15] La tecnica di calcolo degli integrali in coordinate polari è argomento fuori dall'ambito di questo articolo, ma si vuole suggerire l'idea che dietro tali trasformazioni (Simmons 1996) vi è effettivamente una differente nozione di distanza che nel testo è semplificata per chiarirne il senso intuitivo.

[16] Una funzione è *biiettiva* o biunivoca se è sia iniettiva che suriettiva. Una funzione f è *iniettiva* se a valori distinti $f(a)$ e $f(b)$ corrispondono parametri a e b distinti. Una funzione f dall'insieme A in B è *suriettiva* se l'insieme dei suoi valori copre interamente l'insieme B.

[17] In realtà questa presentazione è riduttiva. Ad esempio uno spazio vettoriale non di questa forma si ottiene prendendo come punti le funzioni dai naturali ai reali: questo equivale ad avere uno spazio cartesiano a infinite dimensioni, una coordinata per ogni numero naturale.

[18] Intuitivamente due o più punti sono linearmente indipendenti se non è possibile ricavarli da un sottoinsieme di essi mediante somma o prodotto per uno scalare. Se lo spazio è cartesiano, possiamo dire in modo equivalente che le rette che congiungono i vari punti con l'origine sono tutte distinte.

[19] A meno di presentazioni banali, ad esempio scegliendo come funzione di distanza $d(x, y) = 0$ se $x = y$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$. Per "coerente" si intende una distanza che sfrutti davvero la rappresentazione vettoriale dei punti.

spazi metrici sono isomorfi[20] quando esiste tra essi una funzione biiettiva che preservi la distanza. Il fatto che questi spazi siano univocamente determinati a meno di una classe di trasformazioni (biiezioni lineari o biiezioni che preservano la metrica), ovvero identificando tra loro spazi isomorfi, è un aspetto estremamente significativo per comprendere il profondo passaggio concettuale che essi rappresentano: non è più fondamentale la rappresentazione degli spazi (che pur li definisce), ma differenti rappresentazioni purché isomorfe, ovvero mutuamente convertibili una nell'altra da una trasformazione che rispetti la struttura dello spazio, sono equivalenti. Ad esempio il piano reale è descrivibile indifferentemente mediante le usuali coordinate cartesiane o mediante coordinate polari; le due rappresentazioni sono equivalenti quindi descrivono il medesimo spazio. Al contrario il piano reale e il piano razionale sono differenti: non è possibile trovare una funzione lineare biiettiva $\mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (dalle coppie di numeri razionali alle coppie di reali) come segue dalla teoria degli insiemi di Cantor (Cantor 1989).

Molti altri aspetti che legano l'analisi matematica e l'algebra al concetto di spazio potrebbero essere enucleati, ma quanto riportato è funzionale al seguito di questo articolo in modo da formare una base concettuale che poi useremo (e che storicamente fu usata) per astrarre e generalizzare i concetti di spazio che l'analisi e l'algebra hanno prodotto e che in questa parte sono stati sommariamente introdotti tralasciando numerose varianti importanti in Matematica, ma inessenziali al nostro percorso.

Le geometrie non-euclidee

Il lettore attento avrà notato come abbiamo abbandonato il percorso storico, tralasciando il fondamentale capitolo delle geometrie alternative a quelle di Euclide che pur sono coeve a parte degli sviluppi della sezione precedente. In realtà sarebbe più appropriato dire geometrie alternative alla cartesiana dato che nulla impedisce di considerare spazi a dimensione superiore a tre.

In termini elementari (e, in parte, limitativi) una geometria non-euclidea è una geometria in cui non vale uno dei postulati di Euclide (Bonola 1912), solitamente il quinto, pur valendo tutti gli altri assiomi. L'esistenza di questo tipo di geometrie è dovuto alla scoperta di Bolyai e Lobachevsky, seppur Gauss anticipò, ma senza pubblicare, il risultato.

Al di là del significato filosofico, ovvero che per la prima volta la Matematica mostra l'esistenza di un "mondo" alternativo nella sua struttura a quello considerato come "reale", ma altrettanto coerente[21], la scoperta delle geometrie non-euclidee generò in modo evidente nuove nozioni di spazio. Per trattare tali nozioni fu necessario sviluppare nuovi strumenti concettuali e tecnici in grado di disegnare in modo uniforme questi spazi che, seppur all'apparenza anti-intuitivi, tuttavia conservavano una profonda similitudine strutturale con il classico sistema euclideo o cartesiano.

Un primo approccio in tal senso fu l'immersione di queste geometrie nella geometria classica: in tal modo, reinterpretando in un modello classico la nuova geometria, in modo semplice se ne derivavano numerose proprietà per trasposizione di quelle usuali e, al contempo, si garantiva la consistenza (l'assenza di contraddizioni interne) del nuovo sistema geometrico[22]. Questa tecnica tipicamente semantica e di natura intrinsecamente logica, ovvero sfruttare la struttura di un sistema noto per indurre le caratteristiche desiderate in un sistema nuovo, diverrà uno degli strumenti tipici della Matematica del XX secolo.

Per dare un esempio relativamente semplice di questo processo si può considerare il caso della geometria sferica di Riemann: si prenda la superficie di una sfera e si chiami "punto" una coppia di punti separati da un diametro, si chiami "retta" un arco di cerchio massimo e si chiami "angolo" tra due "rette" l'angolo formato dalle tangenti ai cerchi massimi rappresentanti le rette in uno dei punti di intersezione. Non è difficile verificare che tutti gli assiomi della geometria euclidea sono soddisfatti[23] ma non il postulato delle parallele: infatti necessariamente ogni coppia di "rette" distinte si interseca! In questa geometria, che è presentabile in termini puramente assiomatici, alcune proprietà della geometria classica vengono a cadere: ad esempio la somma degli angoli interni di un triangolo dipende dalla dimensione ed è sempre superiore a due angoli retti: per capire questo fatto si può prendere un "punto" qualsiasi, tracciare un "segmento" di lunghezza pari a un quarto della circonferenza della sfera in una direzione qualsiasi, quindi, dal punto di arrivo, tracciare un altro segmento della medesima lunghezza che formi un angolo retto con il precedente, e infine, al

[20] Isomorfo significa sostanzialmente indistinguibile; una definizione rigorosa e generale è una conquista del XX secolo.
[21] Si noti come, dopo Einstein, la concezione è cambiata: il nostro universo, nella visione relativistica, è non-euclideo.
[22] Sarebbe più corretto dire che si garantiva che il nuovo sistema era tanto consistente quanto la geometria classica, mancando una prova di consistenza di quest'ultima.
[23] A parte un paio di varianti da introdurre sugli assiomi di ordinamento e di incidenza, ma si tratta di aggiustamenti sostanzialmente irrilevanti.

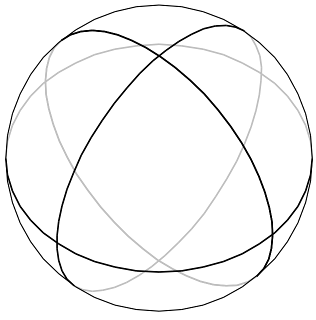

Figura 3: Triangoli sferici la cui somma degli angoli interni è 270 gradi.

punto di arrivo del secondo segmento, tracciare un terzo segmento ad angolo retto con il precedente per chiudere il triangolo. Il triangolo così individuato sulla superficie della sfera ha necessariamente tutti i lati uguali e tutti gli angoli interni retti, pertanto la somma degli angoli interni è pari a tre angoli retti. La figura 3 illustra i triangoli costruiti a partire da tre "rette" perpendicolari tra loro. Ognuno degli otto triangoli così formati corrisponde a quello di cui abbiamo illustrato la costruzione.

Si noti come la costruzione del modello garantisce la coerenza degli assiomi: il modello vive nella geometria classica quindi[24] non vi possono essere contraddizioni all'interno della geometria sferica, perché ogni contraddizione ne genererebbe immediatamente una analoga nella geometria euclidea.

La nascita di un grande insieme di geometrie alternative a quella classica pose la domanda sul motivo per cui si ritiene la geometria euclidea "migliore" delle altre. Una risposta matematicamente convincente si trova nella tesi di abilitazione di Riemann (Riemann 1854), un capolavoro della letteratura matematica di ogni tempo. In sintesi, egli definì "geometria" come la struttura generata dalle *geodetiche* (il percorso minimo tra due punti) su una superficie fissata. In questo modo la geometria euclidea diviene la geometria "naturale" del piano cartesiano bidimensionale, così come la geometria sferica diviene la geometria "naturale" della superficie sferica. Possiamo pertanto affermare che ogni superficie dotata di un proprio concetto di distanza ammette una geometria "migliore" in quanto meglio si adatta a descrivere la struttura spaziale soggiacente[25].

Un approccio sul medesimo solco, ma più profondo, dovuto principalmente a Klein nel suo famoso programma di Erlangen (Klein 1872), fu quello di considerare la geometria come ciò che è invariante rispetto a una famiglia di trasformazioni su uno spazio cartesiano fissato.

L'idea è intuitivamente semplice ma con conseguenze di vasta portata: ad esempio la geometria euclidea è l'insieme delle proposizioni invarianti rispetto alle rotazioni, alle traslazioni e alle simmetrie rispetto agli assi cartesiani. Questo significa che le proprietà di una figura non mutano quando l'oggetto viene ruotato, traslato o ribaltato[26]. Perciò fissando uno spazio cartesiano, le geometrie che su di esso si possono imporre sono le famiglie di trasformazioni di tale spazio in se stesso. È necessario che tali trasformazioni soddisfino alcune proprietà elementari, sostanzialmente formare un gruppo algebrico rispetto alla composizione e questa struttura genera le proprietà che non mutano rispetto a tali trasformazioni[27]. Queste proprietà sono esattamente l'insieme delle affermazioni vere nella geometria generata[28].

Riteniamo importante sottolineare come vi sia una specie di scambio prospettico: nella geometria classica si definisce assiomaticamente lo spazio e se ne ricavano le proprietà, in particolare le leggi sulla similitudine o sulla uguaglianza di figure. Invece nell'approccio di Klein (e anche di Riemann) si procede in modo opposto: la definizione

[24] Supponendo la coerenza della geometria classica!
[25] A questo proposito la geometria "naturale" per uno spazio in cui la massa determina la curvatura dello spazio è la relatività di Einstein.
[26] Le simmetrie sono fondamentali per descrivere, ad esempio, i nodi: il lettore può facilmente notare che un triangolo scaleno non può essere ribaltato solo mediante rotazioni e traslazioni.
[27] Ovvero, se $P(x)$ è una proprietà che dipende dal punto x, allora $P(x)$ vale se e solamente se $P(\theta(x))$ vale per ogni trasformazione θ nel gruppo della geometria.
[28] Nel caso della relatività ristretta, le trasformazioni cui la geometria è invariante sono quelle di Lorentz e la geometria generata è nota come spazio-tempo di Minkowski.

delle trasformazioni induce le proprietà che non mutano ovvero le affermazioni vere nella geometria, e in particolare, quando due figure sono da considerarsi uguali[29].

Il lettore attento saprà riconoscere che questo è un tipico approccio "esterno": invece di ricavare le proprietà di una teoria per deduzione dai principi primi fissati aprioristicamente (e giustificati al di fuori della teoria stessa), si descrivono le proprietà in modo implicito come le affermazioni in un linguaggio formale fissato, tipicamente logico (nel caso di Klein, il linguaggio della geometria cartesiana), e scegliendo di far valere solo le affermazioni invarianti rispetto a un gruppo di trasformazioni prescelto[30] che diviene la presentazione "esterna" della geometria, esterna appunto in quanto espressa nel linguaggio della teoria ospitante (la geometria cartesiana nel caso di Klein), piuttosto che "interna", ovvero espressa nel linguaggio proprio della teoria che si intende sviluppare. Anche, questo approccio non necessita di una giustificazione esterna al sistema: per il semplice fatto di operare in una teoria esterna già giustificata, non serve garantire la coerenza della geometria generata dalle trasformazioni, in quanto assicurata dalla teoria ospitante (almeno in senso relativo).

Nella seconda metà del XX secolo i metodi esterni, più astratti e complessi, ma anche enormemente più generali e potenti, rivestiranno un ruolo essenziale nel progresso della Matematica e, per quanto ci riguarda, nella concezione di un'idea più profonda di spazio.

Topologia

Sebbene concepire una geometria come una struttura addizionale imposta al di sopra di uno spazio soggiacente permetta di dare una illustrazione elegante, astratta e profonda delle geometrie euclidee e non solo, tuttavia essa non chiarisce in modo soddisfacente la fondamentale struttura che definisce l'idea matematica di spazio che sottende l'esplosione di "spazi" che popolano il panorama matematico e di cui abbiamo tentato di fornire una breve e incompleta sintesi nelle sezioni precedenti.

L'indagine intorno al concetto fondamentale di spazio è stata uno dei tasselli fondamentali della matematica del XX secolo e non è scorretto dire che la disciplina che ne è scaturita, la topologia, sia stata uno dei campi più influenti e più fecondi di risultati e di metodi.

Come abbiamo compreso nelle sezioni precedenti, gli spazi vettoriali sono delle strutture eminentemente algebriche, ma non necessariamente identificano uno spazio propriamente detto: in generale essi non consentono la definizione di nozioni quali "prossimità", "avvicinamento a un punto", ecc., che sono indispensabili per cogliere l'idea intuitiva di "spazio". D'altro canto gli spazi metrici, che permettono di cogliere queste istanze, sono poco adatti al calcolo (infatti, l'analisi matematica si sviluppa essenzialmente in spazi vettoriali dotati di metrica). La questione che ci si può legittimamente porre è se esista una nozione formale di "spazio" che comprenda gli spazi metrici e quelli vettoriali, e che dia significato all'idea intuitiva di "vicinanza" tra due punti.

L'idea di fondo della topologia non è nuova, ma la generalità della formulazione e la semplicità organizzativa che ne deriva ha dato una impostazione completamente sorprendente, che viene generalmente considerata soddisfacente per la soluzione della questione di cosa sia uno "spazio" matematico[31].

Uno spazio topologico è un insieme di oggetti, detti *punti*, e una struttura che ne descrive il funzionamento come spazio, la *topologia*, appunto. L'idea intuitiva è che la struttura dello spazio è data da come i punti possano essere "incollati" tra di loro.

Invece di descrivere in modo diretto la "colla tra i punti", si usa una nozione ausiliare, gli *insiemi aperti*, che definiscono i raggruppamenti di punti "incollati" tra di loro. Gli insiemi aperti soddisfano poche e semplici regole:

---

[29] In effetti proprio il problema di definire quando due figure sono uguali nel caso particolare della geometria proiettiva, ha indotto lo studio unificato delle geometrie non-euclidee in generale. Nonostante la loro centralità, non discutiamo in questo articolo della geometria proiettiva o della geometria affine in quanto la loro presentazione ci porterebbe molto lontano dallo sviluppo delle idee del Novecento. Il lettore interessato può consultare (Courant e Robbins 1971). Ci basti dire che la geometria proiettiva considera uguali due figure che siano la rappresentazione prospettica della medesima scena; mentre la geometria affine considera uguali due figure se queste sono simili nel senso euclideo.

[30] Si noti come la struttura di gruppo sia indispensabile per lo scopo: se non vi fosse la trasformazione identica, che funge da unità del gruppo, una affermazione potrebbe essere sia vera che falsa! Se non vi fosse la composizione, non seguirebbe che effettuare in sequenza due trasformazioni porti da una affermazione vera a una vera.

[31] Anche se, come vedremo nel seguito, tale nozione può essere troppo restrittiva per alcuni contesti, e non la minima necessaria per forzare la validità delle proprietà che ci si aspetta che uno spazio debba avere.

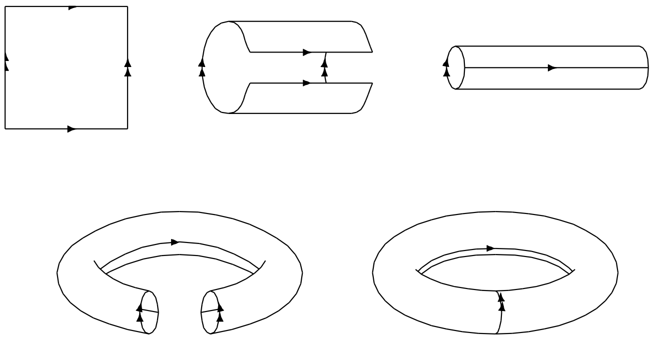

Figura 4: Costruzione di percorsi elementari irriducibili su un toro.

1. l'insieme vuoto e l'insieme di tutti i punti dello spazio sono insiemi aperti;
2. l'intersezione di due insiemi aperti è a sua volta un aperto;
3. l'unione di una famiglia di aperti (una collezione arbitraria, anche infinita, ma indicizzata da un insieme[32]), è un aperto.

Una topologia è una famiglia di sottoinsiemi di punti i quali siano tutti aperti, ovvero una famiglia che soddisfi le proprietà sopra elencate. Ad esempio, se consideriamo i numeri reali e gli intervalli aperti, privi degli estremi, allora le unioni di questi intervalli formano una topologia[33].

Il modo naturale per confrontare due spazi topologici è definire una funzione che mappi i punti del primo spazio nel secondo e che rispetti la struttura spaziale. La seconda condizione richiede qualche riflessione, essendo tale struttura definita in modo indiretto. Alla prova dei fatti la corretta condizione da imporre risulta essere che la funzione $f\colon A \longrightarrow B$ debba essere *continua*, ovvero che per ogni aperto $U \subseteq B$, $f^{-1}(U)$ sia un aperto, in linguaggio naturale, le contro-immagini di aperti devono essere aperti. Seppur elegante, tale formulazione non è immediatamente ovvia: sia nel senso che non è evidente il motivo per cui una funzione che rispetti tale condizione debba essere definita continua; sia nel senso che non è chiaro in che modo questa condizione preservi la struttura spaziale. Nel primo senso, se si prende la nozione di continuità dell'analisi e si esprime mediante intervalli aperti, come è la topologia standard sui reali, si vede la coincidenza della definizione topologica con quella analitica: questo giustifica la denominazione di funzioni continue. Nel secondo senso, la definizione è intuitiva se si considerano le funzioni "al contrario": infatti l'idea è quella di dire che, comunque piccolo si prenda un "intervallo" (l'aperto V) attorno a un punto[34] nell'immagine della funzione, è sempre possibile trovare un corrispondente intervallo (l'aperto $f^{-1}(V)$) per cui tutti i valori della funzione calcolata in tale intervallo cadano in V.

Le proprietà topologiche fondamentali, specialmente la compattezza[35], che uno spazio può possedere o meno, permettono di formulare in modo generalizzato il concetto di limite e di convergenza[36]. Per poter sviluppare una analisi matematica generalizzata di solito si richiede qualche ulteriore proprietà dello spazio, ad esempio che esso sia di Hausdorff, ovvero che, per ogni coppia di punti x, y, vi siano sempre due aperti U e V tali che $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Queste proprietà di separazione consentono di ottenere proprietà utili quali il fatto che ogni sequenza, se converge, converge a un unico valore. Quindi la topologia consente di isolare la struttura che uno spazio deve possedere per garantire l'esistenza e unicità dei limiti.

[32] Normalmente questa condizione sull'indicizzabilità non compare nei manuali di topologia in quanto ovviamente derivabile nella usuale teoria degli insiemi, ma diverrà importante nel seguito dell'articolo, quando considereremo topologie senza punti.

[33] È interessante notare come le intersezioni arbitrarie non formino aperti, ad esempio l'intersezione degli intervalli $(0 - x, 0 + x)$ per ogni x reale strettamente positivo, è l'insieme $\{0\}$ che non corrisponde a un intervallo aperto.

[34] In effetti la spiegazione sottende il concetto di "intorno di un punto" che è normalmente esplicitata per dare il senso della continuità, si veda ad esempio (Munkres 2000).

[35] Uno spazio X è detto *compatto* quando, per ogni famiglia $\{U_i\}_{i\in I}$ di aperti con $\bigcup_{i\in I} U_i$, esiste un insieme finito $J \subseteq I$ tale che $X = \bigcup_{j\in J} U_j$, ovvero che ogni ricoprimento aperto contiene un ricoprimento finito.

[36] In modo semplice si può dire che, in uno spazio compatto, se C è una famiglia di insiemi chiusi (complementi di aperti) in cui, per ogni $Y \subseteq C$ finito, vale che $\bigcap Y \neq \emptyset$, allora $C \neq \emptyset$. Questo significa che, se costruisco una famiglia di insiemi chiusi per approssimare un singolo punto, ad esempio $\{[p_i, q_i]\}_{i\in\mathbb{N}}$ con p_i pari a π con i cifre decimali approssimato per difetto e q_i pari a π con i cifre decimali approssimato per eccesso, allora tale famiglia (visibile come una sequenza) ha come limite (intersezione infinita di tutti i chiusi) esattamente un punto, π.

La topologia rivolge il proprio interesse anche ad altre proprietà strutturali dello spazio quali la connessione. Uno spazio X si dice *connesso* se esso non è separabile in due aperti disgiunti: formalmente X è connesso se non esistono U e V aperti non vuoti tali che $U \cup V = X$ e $U \cap V = \emptyset$. L'importanza della connessione è che essa è una proprietà generale che permette di astrarre teoremi importanti validi sui numeri reali. Ad esempio, il Teorema del Valor Medio, in forma puramente topologica, diviene: dati due spazi topologici X e Y e una funzione continua $f: X \longrightarrow Y$, se X è connesso, allora anche $f(x)$ lo è[37].

Tra le varie proprietà topologiche ve ne sono alcune che garantiscono, quando uno spazio le possegga, che lo spazio sia "metrizzabile" ovvero che possa essere definita su di esso una funzione di distanza che lo renda uno spazio metrico. Al contrario. ogni spazio metrico genera in modo naturale uno spazio topologico[38]. Non è scopo di questo articolo dare una illustrazione tecnica, ancorché di massima, per queste nozioni, il lettore interessato è rimandato a uno dei numerosi manuali introduttivi della materia, ad esempio (Munkres 2000).

Invece è importante rammentare il contributo di H. Poincaré, il quale ha dato avvio alla topologia algebrica, definendo il cosiddetto gruppo omotopico fondamentale. L'idea è relativamente semplice ed è illustrata in figura 4: se prendiamo uno spazio topologico, ad esempio la superficie di una ciambella (un *toro*, con termine tecnico) e fissiamo un punto P su di essa, possiamo considerare tutti i percorsi continui che partano e terminino in P. Definiamo equivalenti due percorsi di questo tipo quando esista una *omotopia* tra di essi, ovvero una famiglia di funzioni continue a valori sul toro, ciascuna delle quali mappi ordinatamente i punti del primo percorso nei punti del secondo. Formalmente, se π_1 e π_2 sono i percorsi sulla superficie S, intesa come insieme di punti, ovvero se $\pi_1, \pi_2: [0,1] \longrightarrow S$ sono continue con $\pi_1(0) = \pi_2(0) = \pi_1(1) = \pi_2(1) = P$, allora una omotopia tra π_1 e π_2 è una funzione continua $\theta: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow S$ tale che $\theta(0,x) = \pi_1(x)$ e $\theta(1,x) = \pi_2(x)$. Parametrizzando possiamo definire $\theta_t(x) = \theta(t,x)$, generando la sopracitata famiglia di funzioni continue. Intuitivamente significa che possiamo stendere tra π_1 e π_2 un quadrato di gomma infinitamente estendibile e contraibile senza mai effettuare tagli. Nel caso del toro troveremo che i percorsi possibili, a meno di omotopie, sono i percorsi che girano n volte attorno al buco della ciambella, i percorsi che girano n volte attorno al "tubo" della ciambella e le loro composizioni, per ogni n intero. La direzione in cui il percorso gira è data dal segno di n, e quando $n = 0$, il percorso è nullo, ovvero si resta fermi nel punto P. Il gruppo fondamentale ha per elementi tutti questi percorsi, in cui il percorso nullo funge da identità, mentre la composizione funge da operazione per il gruppo; l'inverso è dato semplicemente invertendo la direzione di percorrenza. Non è difficile capire che questo gruppo è isomorfo a $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (0,0), + \rangle$, ovvero al gruppo formato dalle coppie di interi con l'ovvia somma e unità.

Il fatto significativo è che tutti gli spazi topologici posseggono un gruppo fondamentale e che esso contiene abbastanza informazione da derivare numerose proprietà dello spazio, in particolare quelle relative alla connessione[39]. Il vantaggio è che il toro contiene una quantità di punti infinita ma pari ai numeri reali, mentre il corrispondente gruppo fondamentale è discreto, ovvero contiene tanti elementi quanti i naturali, cioè è molto più piccolo. Quindi il gruppo fondamentale è un "riassunto" dell'informazione contenuta nello spazio, organizzata in una struttura algebrica, e sufficiente a permetterci di estrarre ancora proprietà significative sullo spazio.

Nel tempo la topologia algebrica ha moltiplicato il numero di "riassunti significativi", associando strutture algebriche agli spazi topologici, sia considerando strutture omotopiche che omologiche. In effetti oggi la topologia algebrica è uno dei campi più complessi e specialistici della Matematica ed è estremamente difficile riuscire a darne una spiegazione semplice e sommaria, oltre la brevissima cha abbiamo accennato.

Nonostante l'incompletezza della trattazione, quanto ci preme sottolineare è che la topologia definisce un concetto piuttosto astratto di spazio come una struttura di (insiemi) aperti sui punti. Mediante l'uso degli aperti, richiedendo eventualmente proprietà aggiuntive, è possibile sviluppare in modo astratto le nozioni di convergenza e di limite (i fondamenti dell'analisi), un modo per confrontare gli spazi mediante funzioni continue (e due spazi risultano uguali se esiste una funzione continua biiettiva tra di essi) e un insieme di proprietà strutturali, quali la connessione, che formalizzano bene quanto siamo abituati a concepire intuitivamente come parte della struttura spaziale.

---

[37] Senza entrare nei dettagli tecnici il teorema topologico garantisce che, se Y fosse lo spazio dei reali, allora $f(X)$ deve essere un intervallo di cui la funzione assume tutti i valori.

[38] È sufficiente considerare come base per lo spazio, per ogni punto x e distanza $d \geq 0$, gli aperti $\{y | d(x,y) < d\}$. Una base B per uno spazio topologico è un insieme di aperti tale che ogni altro aperto sia scrivibile come unione di un opportuno sottoinsieme di B.

[39] Per la precisione, le proprietà di connessione per percorsi mentre proprietà più generali possono non essere derivabili dal gruppo fondamentale, ad esempio, l'essere semplicemente connessi, si veda a questo proposito la congettura di Poincaré (O'Shea 2007).

Inoltre la topologia, nelle sue forme più sofisticate, consente di associare allo spazio dei "riassunti" dell'informazione in esso contenuta e di garantire che alcune proprietà siano derivabili da questi riassunti i quali risultano di più semplice manipolazione, sia per la ridotta dimensione, sia per la forma algebrica che offre numerose tecniche di analisi.

Fondamenti e astrazione

Storicamente, accanto alla creazione della topologia, nacque la logica matematica e la cosiddetta critica ai fondamenti, culminata nel famoso Teorema di Incompletezza di Gödel (Kline 1972). Rispetto allo scopo di questo articolo, illustrare il concetto di spazio matematico, la critica ai fondamenti ebbe un ruolo marginale che brevemente riassumiamo. Sul lungo periodo tuttavia, essa indusse riflessioni che portarono a generalizzazioni e a differenti interpretazioni dell'idea di spazio, ed è questa parte che intendiamo sviluppare in questa sezione.

La critica sui fondamenti nacque, in parte, come riflesso alla nascita delle geometrie non euclidee: il sentimento diffuso fino ai primi dell'Ottocento era che esistesse un legame tra il "mondo reale" e la Matematica, almeno nelle sue parti fondamentali. Se si poteva costruire un modello numerico o un modello geometrico di una teoria oppure di un fenomeno matematico, allora questi era fondato. Nel momento in cui si proposero geometrie in evidente disaccordo con il mondo sensibile ci si pose la domanda se queste teorie "esistessero", ovvero se ammettessero dei modelli "esistenti". Il concetto di esistenza venne quindi posto in discussione e vi furono due ordini di risposte: una teoria esiste se ammette un modello ricavabile da una teoria esistente, oppure una teoria esiste se è internamente coerente.

Ad esempio la geometria sferica di Riemann esiste in quanto è possibile costruire un modello per essa nella geometria euclidea. Sarebbe più opportuno parlare, in questo caso, di esistenza relativa: se ammettiamo che la geometria di Euclide abbia senso, allora siamo obbligati ad accettare anche la geometria sferica, proprio in quanto possiamo descriverne un modello all'interno della geometria euclidea. Generalmente questa visione relativa è perfettamente accettabile, e viene perseguita tutt'oggi nella pratica della Matematica: per costruire una nuova teoria si parte da un sistema noto e lo si usa per generare la nuova struttura di interesse. Nel tempo si sono costruiti sistemi più adatti a questo scopo, che sono stati usati per fondare tutta (o meglio, gran parte) della Matematica. Il caso più noto è la Teoria degli Insiemi, ma vi sono parecchi sistemi che si prestano al medesimo scopo.

Ovviamente si pone il problema dell'esistenza di questi sistemi universali. Una delle conseguenze dello sviluppo della logica matematica è stata la formalizzazione di nozioni basilari e apparentemente intuitive, come il concetto di insieme, che, a una analisi attenta[40], hanno rivelato essere piuttosto complesse. Nel caso specifico degli insiemi, vi sono proprietà ovvie per gli insiemi finiti che non si traspongono sugli insiemi infiniti, e che per essere garantite necessitano di un assioma apposito. L'esempio più noto è il principio della scelta: dato un prodotto infinito di insiemi non vuoti, da esso posso sempre estrarre una funzione che associa all'indice di un insieme X nel prodotto un elemento di X. Nel caso finito questa proprietà è evidente: corrisponde alla rappresentazione tabellare di una funzione, che è sempre possibile. Nel caso infinito invece, non è per nulla evidente e infatti, l'assioma della scelta risulta essere *indipendente*, ovvero non dimostrabile a partire dagli altri assiomi sugli insiemi (Cohen 2008). È infatti possibile costruire un modello per la teoria degli insiemi in cui tale assioma sia falso[41]. Risultati analoghi sono stati ottenuti con tecniche similari per altri assiomi "critici", quali l'ipotesi del continuo.

Il Teorema di Incompletezza di Gödel garantisce che non vi sono altre possibilità oltre l'esistenza relativa. Infatti esso può essere informalmente enunciato anche come "se una teoria è effettivamente scrivibile e abbastanza potente, allora essa ammette almeno un enunciato non dimostrabile la cui negazione è pure indimostrabile". Questa enunciazione dipende in modo sostanziale da due aspetti: in primo luogo, la teoria deve essere "scrivibile": se si ammettono infiniti assiomi scelti opportunamente[42] allora si può superare la limitazione che il teorema pone[43]. In secondo luogo, la teoria deve essere sufficientemente potente, ad esempio deve permettere di codificare l'aritmetica. Quando il teorema si applica (in pratica in tutte le teorie matematiche di qualche rilievo), allora non si può immaginare che esista un unico modello per la teoria: sfruttando il suo linguaggio, è sempre possibile costruire due modelli di

[40] Resoconti molto accessibili e divertenti a queste problematiche sono (Osenda 2009) e (Doxiadis e Papadimitriou 2009) che combinano l'arte del fumetto con una trattazione matematica precisa, seppur informale.

[41] Si tratta di un modello non intuitivo, ma la sua costruzione si può fare all'interno dell'usuale teoria degli insiemi mediante una tecnica nota come *forcing*, dovuta a Cohen. Di interesse per i nostri scopi è il fatto che il modello anti-intuitivo ottenuto mediante forcing possa essere formalizzato in modo relativamente semplice usando la teoria dei topoi, che ricorrerà più avanti nella nostra trattazione.

[42] Tecnicamente, se l'insieme degli assiomi non è ricorsivamente enumerabile.

[43] Banalmente si sceglie un modello per la teoria e si prendono come assiomi tutti gli enunciati veri in quel modello.

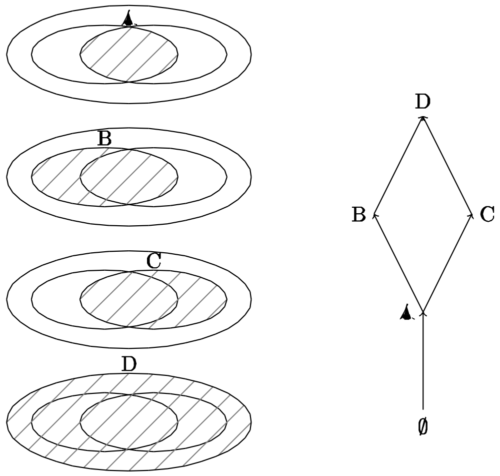

Figura 5: Una semplice topologia e il corrispondente reticolo.

simboli in cui, in uno valgono tutti gli assiomi e un enunciato G, mentre nell'altro valgono tutti gli assiomi e la negazione di G. Pertanto non è possibile costruire un "oggetto primo" che garantisca la coerenza della teoria e che sia perfettamente conoscibile, in quanto costruibile a partire da qualcosa di dato, ovvero la sintassi.

Sulla medesima falsariga anche l'approccio formalista che afferma che un sistema "esiste" se è internamente coerente, è inadeguato a fornire una fondazione: infatti la coerenza interna è equivalente a richiedere l'esistenza di un modello per la teoria. Questo fatto porta, alla fine, alle medesime conclusioni, ovvero che solo la coerenza relativa è un concetto sensato per le teorie matematiche in quanto il modello che si individua sintatticamente non descrive esattamente tutte le verità della teoria e non è, per il teorema di incompletezza, effettivamente scrivibile, vanificando lo sforzo di dare una prova di coerenza che usi un oggetto al più altrettanto complesso della teoria di cui si intende provare la consistenza.

Nel caso del concetto di spazio abbiamo visto come la coerenza interna sia ottenuta attraverso l'appoggio a una teoria esistente, tipicamente la geometria cartesiana (geometrie non-euclidee), oppure la teoria degli insiemi (topologia).

La presenza di principi discutibili all'interno di questi sistemi come, ad esempio, l'assioma della scelta, ha portato a chiedersi quanta parte del concetto di spazio richieda davvero tutti i principi della teoria degli insiemi o della logica per essere formalizzato e trattato in un sistema assiomatico. è evidente che ogni assioma per lo spazio dipenda dal linguaggio che si usa per scriverlo: se, come consuetudine, si adotta un linguaggio logico e insiemistico, allora ci si può legittimamente chiedere quanti degli assiomi della logica e della teoria degli insiemi sono necessari per lo sviluppo della nostra teoria. È ovvio che possiamo tracciarne l'uso all'interno di ogni teorema e risultato che dimostriamo; ma la questione vera è se non vi siano dimostrazioni che usano "meno" principii, o anche se non sia possibile dimostrare una proposizione più debole ma sufficiente a supportare gran parte dello sviluppo della teoria.

Queste domande, di carattere generale seppur formulate in relazione all'idea di spazio, sono al fondo degli sviluppi che intendiamo ora illustrare. Essi sono due: la *topologia formale* e gli spazi di Grothendieck.

La scomparsa dei punti

Nell'ambito della critica dei fondamenti un importante rilievo assume la posizione "costruttivista" la quale impone che ogni oggetto che si dimostri esistere, debba essere costruito. L'idea di fondo è intuitiva: dimostrare che un oggetto esista significa poterlo esibire quindi si richiede che ogni dimostrazione "costruttiva" fornisca, esplicitamente o implicitamente, un algoritmo per generare a richiesta l'oggetto. Questo principio non è valido nella pratica matematica usuale: molte dimostrazioni di esistenza usano il principio del terzo escluso (per ogni proposizione A, vale A oppure non-A); in questo caso, il tipico processo di dimostrazione si svolge assumendo la non esistenza dell'oggetto, derivandone una contraddizione e quindi, in base al terzo escluso, si desume che l'oggetto esiste. Questa procedura non permette di identificare l'oggetto mediante una costruzione, ma solo la sua impossibilità a non esistere[44]. I sistemi costruttivi negano la validità del principio del terzo escluso per prevenire la creazione di oggetti di cui non sia possibile la costruzione.

La topologia formale nasce da una osservazione e da una impostazione di tipo costruttivo della disciplina. L'osservazione è che la maggior parte dei risultati di topologia possono essere rifrasati e dimostrati senza menzionare i punti, ma solo gli insiemi aperti e gli insiemi chiusi, cioè i complementi degli aperti.

Infatti gli spazi topologici, possono essere visti come una associazione tra la struttura algebrica degli aperti e uno spazio di punti: gran parte delle proprietà topologiche dipendono esclusivamente dalla struttura algebrica degli aperti e non dalla mappa che associa a ogni aperto la sua estensione, ovvero l'insieme di punti che lo compongono.

Gli aperti di uno spazio topologico formano quello che in algebra si chiama un *reticolo*, ovvero una collezione di oggetti con una relazione di ordinamento parziale tra di essi (nel caso degli aperti, la relazione di sottoinsieme) tale per cui, per ogni coppia di oggetti, sia definito un unico oggetto che sia il più grande oggetto minore di entrambi, e un oggetto che sia il più piccolo oggetto maggiore di entrambi. In realtà, il reticolo degli aperti è più strutturato: esso ammette un oggetto massimo (l'insieme dei punti dello spazio) e un oggetto minimo (l'insieme vuoto). L'operazione di trovare il massimo minorante corrisponde all'intersezione di aperti, mentre l'operazione di trovare il minimo maggiorante corrisponde all'unione. Questo implica che l'operazione di unione è estendibile a insiemi arbitrari di aperti, mentre l'intersezione non lo permette: un reticolo di questo tipo si dice completo rispetto all'unione. Inoltre vale la proprietà distributiva tra le operazioni di unione e intersezione, che limita ulteriormente la struttura di reticolo. Un esempio di reticolo corrispondente a una topologia è mostrato nella figura 5.

Se ci si limita a considerare reticoli con una siffatta struttura, generalmente noti come *frames*[45], si riescono a dimostrare, in modo sostanzialmente costruttivo, numerose proprietà della topologia classica, eventualmente rifrasando in modo equivalente alcune definizioni. Questo approccio ha portato allo sviluppo della teoria dei *locales*[46] che risulta essere un ponte tra l'algebra degli ordini e la topologia. In effetti i locales sono un caso molto speciale di una struttura spaziale più raffinata che introdurremo in seguito: i *siti*, ovvero categorie dotate di una topologia di Grothendieck.

Tuttavia, per dare una maggiore capacità espressiva alla struttura degli aperti, è necessario definire anche gli insiemi chiusi che in topologia standard sono definiti come i complementi degli aperti. Imporre che un reticolo abbia complementi è una richiesta forte che snatura l'interpretazione topologica or ora accennata: raramente un chiuso è anche un aperto, quindi non è possibile considerare solo la struttura degli aperti, ovvero il reticolo. Tuttavia è possibile associare a ogni aperto un chiuso mediante una differente interpretazione dello stesso oggetto sui reticoli: quando guardo un oggetto come un aperto, lo vedo attraverso la sua estensione, quando lo osservo come un chiuso, lo guardo per mezzo di una differente operazione (che chiameremo convenzionalmente *restrizione*), che classicamente è il complemento della sua estensione. In questo modo abbiamo una unica struttura che descrive lo spazio, il reticolo, ma due interpretazioni, una che individua gli aperti, una i chiusi. Rendendo esplicite queste interpretazioni nel linguaggio si ottiene la compresenza di aperti e chiusi e, quindi, la possibilità di sviluppare la topologia in questo ambito.

Il fatto interessante è che non è necessario che l'estensione e la restrizione siano interpretate classicamente. Tutto ciò che serve è che siano in accordo tra di loro, rispettando delle semplici leggi di mutuo "funzionamento". Non è nostro scopo illustrare o discutere i dettagli di tali leggi: si veda (Sambin 2003) per una illustrazione compiuta di questo approccio.

Ancor più interessante è il fatto che non è necessario interpretare davvero i chiusi o gli aperti e nemmeno presupporre la loro interpretabilità su un qualche insieme di punti: è sufficiente richiedere la validità delle leggi che

[44] L'esempio più famoso di una tale dimostrazione è il Teorema di Banach-Tarski, il quale afferma che, presa una sfera, esiste un modo di tagliarla in un numero finito di parti, le quali, ricomposte, danno origine a due sfere identiche a quella di partenza. La dimostrazione dipende in modo essenziale dal principio del terzo escluso, nel senso che viene provato che tale metodo non può non esistere, pur non fornendo alcuna indicazione su come debba essere strutturato. Il punto essenziale è la finitezza del numero di tagli: se si ammettono infiniti tagli, il risultato è ovvio. Infatti tagliando la sfera in tante fette quanti i numeri naturali e tutte uguali, posso ricostruire una prima sfera identica alla originale usando solo le fette pari, e fare la stessa cosa con la rimanenza, ovvero le fette dispari.

[45] La terminologia italiana in questo contesto non è sempre stabilita, quando esistente. Pertanto si preferisce usare il nome inglese, che rappresenta lo standard di comunicazione.

[46] Tecnicamente, un locale è un frame in cui l'ordine sia invertito, ma ciò è irrilevante rispetto alla nostra discussione, essendo le due strutture duali tra loro.

regolano le mutue relazioni tra chiusi e aperti, così come denotati nel linguaggio, per derivare la gran parte dei risultati topologici in modo costruttivo.

In questo modo si generalizzano i risultati topologici ammettendo, in principio, che possano esistere spazi senza punti: in essi valgono i risultati della topologia formale. Ora, tali spazi hanno senso e applicazione, ad esempio, nel fornire un significato "spaziale" ai linguaggi di programmazione funzionale in Informatica (Abramsky e Jung 1994). In tal modo l'intuizione spaziale usuale può essere trasposta verso sistemi in cui l'assenza di punti previene la formalizzazione topologica.

Questa linea di sviluppo naturalmente favorisce l'uso di una logica costruttiva in quanto la negazione (che è rappresentata nel sistema dal complemento quindi, in definitiva, dalla relazione chiusi verso aperti) non rispetta necessariamente il principio del terzo escluso. Sotto un certo punto di vista i risultati di topologia formale sono, pertanto, una parte e non tutti i teoremi provabili in topologia, risultando quindi in una teoria apparentemente più debole della topologia classica. Dall'altro lato però vi sono risultati di topologia formale che sono decisamente anti-classici, e questo avviene in quanto si opera anche con spazi che non hanno un corrispettivo topologico, mancando i punti necessari[47] a definire le estensioni e le restrizioni degli aperti.

Ma vi sono anche esempi che mostrano un comportamento anticlassico in altri sensi. Ad esempio, se si considera la topologia formale generata dalle coppie di numeri razionali (p, q) con $p < q$, e il reticolo generato pensando alle coppie come intervalli aperti, accade uno strano e interessante fenomeno: possiamo definire i punti esattamente come le sequenze $\{(p_i, q_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ di intervalli aperti, indicizzate dai numeri naturali, tali che, per ogni i, $(p_{i+1}, q_{i+1}) \subset (p_i, q_i)$. Questi "punti formali" risultano essere esattamente i numeri reali. In questo modo è possibile definire i numeri reali usando una topologia basata solamente sui razionali[48].

Oltre gli insiemi

Un aspetto collaterale della scomparsa dei punti nella topologia formale è la contemporanea sostituzione degli insiemi con una struttura algebrica: mentre in topologia classica gli aperti sono insiemi di punti dello spazio, in topologia formale gli aperti sono elementi di un reticolo. Nel primo caso, gli aperti danno struttura spaziale ai punti, mentre nel secondo caso la struttura spaziale è il reticolo stesso.

Una domanda logica da porsi è se la struttura di insieme, su cui la topologia classica è basata, sia la più adeguata a descrivere l'idea di spazio. In un certo senso la risposta che possiamo desumere dalla topologia formale è negativa: fondante per il concetto di spazio è la struttura algebrica di reticolo. Tuttavia, un reticolo è un insieme con una speciale struttura d'ordine e quindi quanto è uscito dalla porta, per così dire, ritorna fuori dalla cantina. O, per essere più precisi, gli insiemi hanno mutato ruolo: da mezzo primario per descrivere l'aggregazione di punti sono divenuti supporto per definire l'algebra degli aperti, quindi andando a operare su un differente livello di astrazione.

Partendo dallo studio della geometria algebrica e avendo necessità di abbandonare gli insiemi come base fondazionale, Alexandre Grothendieck (Jackson, Comme appelé du néant—as if summoned from the void: The life of Alexandre Grothendieck I 2004) (Jackson, Comme appelé du néant—as if summoned from the void: The life of Alexandre Grothendieck II 2004) sviluppò un insieme di idee che hanno dato origine a una generalizzazione profonda del concetto di spazio topologico. Questa generalizzazione non è meramente tecnica, ma profondamente concettuale, tanto da permettere di estendere l'intuizione spaziale anche a campi e problemi, in apparenza, distantissimi e totalmente non correlati.

Per illustrare il concetto di topologia di Grothendieck occorre fare un passo indietro e introdurre l'idea di *categoria* (Lawvere e Schanuel 1994). Una categoria è una coppia di collezioni, dotate di alcune semplici operazioni che le collegano. La prima collezione O è quella degli *oggetti*; la seconda è quella delle *frecce*. Ogni freccia f insiste tra due

[47] In realtà anche per motivi tecnici, si ottengono risultati anticlassici: ad esempio, essendo tutte le funzioni continue calcolabili (il sistema è costruttivo, quindi una funzione "esiste" solo se essa è effettivamente costruibile) vi sono "meno" funzioni a disposizione consentendo di ottenere risultati ben più stringenti che nel caso classico. Inoltre molta della topologia formale è stata sviluppata nell'ambito predicativo, in cui la nozione di sottoinsieme non è accettata come siamo usi, proprio per garantire la totale costruibilità degli oggetti topologici: se si ammettesse che ogni sottoinsieme sia un insieme allora necessariamente vi sono insiemi non costruibili, basta prendere, ad esempio, l'insieme dei numeri naturali corrispondenti alla codifica delle macchine di Turing che terminano per ogni input.}.

[48] Dal punto di vista costruttivo, questo è vero solo in parte: occorre richiedere che le sequenze siano costruibili e questo limita i punti formali generabili. I matematici costruttivi, in questo caso, parlano propriamente di "reali costruibili" riferendosi ai punti formali generati da sequenze effettivamente costruibili.

oggetti, il primo dei quali è detto *dominio* ed è quello da cui la freccia parte, mentre l'altro è detto *codominio* ed è quello in cui la freccia termina; per compattezza, una freccia viene solitamente denotata come $f: A \longrightarrow B$ dove A è il dominio e B il suo codominio. Per ogni oggetto A si richiede l'esistenza di una freccia speciale, detta *identità* e indicata con $1_A: A \longrightarrow A$. Inoltre, la categoria è dotata di una operazione parziale, detta *composizione* e denotata da $\circ$, che agisce su tutte le coppie ordinate di frecce $(f: A \longrightarrow B, g: B \longrightarrow C)$ tali che il codominio della prima componente coincida con il dominio della seconda: il risultato dell'operazione $g \circ f: A \longrightarrow C$ è una freccia[49] da A in C. La composizione è soggetta a due assiomi:

1. per ogni oggetto A e frecce f e g per cui le composizioni risultino definite, vale $1_A \circ f = f$ e $g \circ 1_A = g$;
2. per tutte le frecce f, g e h per cui le composizioni risultino definite, vale che $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Vi sono moltissimi modi di interpretare il senso della definizione formale di categoria. Per i nostri fini, il più utile risulta essere immaginare una categoria come l'insieme degli oggetti in cui gli elementi non siano più tra loro completamente indipendenti ma presentino delle associazioni rappresentate dalle frecce. Questa interpretazione è corroborata dal fatto che ogni insieme può essere visto come una categoria avente come oggetti gli elementi dell'insieme e come frecce solamente le identità, con l'unica operazione di composizione possibile.

La filosofia dietro le categorie è che gli oggetti non possiedono una natura intrinseca che ne definisce l'individualità, ma le loro relazioni, esplicitate dalle frecce, determinano il significato degli oggetti. Questo approccio si estende a ogni aspetto della teoria, anche al concetto di categoria: per questo motivo, le trasformazioni tra categorie sono di primario interesse. Un *funtore* è una trasformazione tra categorie che mappa oggetti in oggetti e frecce in frecce rispettando i domini, i codomini, le identità e la composizione, ovvero, come si usa dire, la struttura categoriale. Quando si considerano le categorie come oggetti del discorso, quindi, le corrispondenti frecce divengono i funtori[50].

Naturalmente anche i funtori possono essere eletti a oggetto del discorso --- e lo sono, molto utilmente, come vedremo --- e pertanto esiste anche tra essi un corrispondente concetto di freccia: le *trasformazioni naturali*. Dati due funtori $F: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ e $G: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ dalla categoria $\mathbb{C}$ alla categoria $\mathbb{D}$, una trasformazione naturale α da F in G è una famiglia $\{\alpha_C: F(C) \longrightarrow G(C)\}_{C \in \mathrm{Obj}\mathbb{C}}$ di frecce in $\mathbb{D}$, indicizzata dagli oggetti di $\mathbb{C}$, tale che, per ogni freccia $F: A \longrightarrow B$ in $\mathbb{C}$, vale che $\alpha_B \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$.

La catena potrebbe continuare, andando a considerare le trasformazioni naturali come oggetti e definendo un corrispondente concetto di freccia. Per quanto ci serve, i funtori sono le entità più astratte che ci interessa trattare come oggetti, e quindi interrompiamo la costruzione a questo punto.

Dopo questo succinto excursus sulle categorie, possiamo tornare alla definizione degli spazi secondo Grothendieck. L'idea dietro i *siti*, la generalizzazione di spazio dovuta a Grothendieck, è partire da una categoria invece che da un insieme di punti, come si era fatto nel caso della topologia classica. E, come per i reticoli delle topologie formali, gli oggetti della categoria non rappresentano punti, i quali non concorrono, anche ove presenti, alla costruzione della struttura spaziale. Formalmente un sito è una categoria su cui è imposta una topologia di Grothendieck.

A sua volta, una topologia di Grothendieck su una categoria $\mathbb{C}$ è una collezione $\{J(C)\}_{C \in \mathrm{Obj}\mathbb{C}}$, indicizzata dagli oggetti di $\mathbb{C}$, in cui ogni elemento sia una collezione di *sieve*[51] soggetta ad alcune condizioni di regolarità. Per poterle enunciare occorre introdurre un paio di elementi terminologici: diremo che un sieve S su C *copre un oggetto* C se $S \in J(C)$; diremo anche che un sieve S su C *copre una freccia* $f: D \longrightarrow C$ se il sieve $f^*(S)$ su D copre l'oggetto D[52]. Con questi termini le condizioni di regolarità sopracitate, che determinano quando $\{J(C)\}_{C \in \mathrm{Obj}\mathbb{C}}$ sia una topologia di Grothendieck, sono:

1. se S è un sieve su C e $f \in S$, allora S copre f;
2. se S copre $f: D \longrightarrow C$, allora S copre $g \circ f$, per ogni g con codominio D;
3. se S copre $f: D \longrightarrow C$ e R è un sieve su C che copra tutte le frecce di S, allora R copre anche f.

---

[49] Generalmente $g \circ f$ è letta come "g dopo f" rendendo il senso intuitivo di seguire il percorso delle frecce.
[50] In questo senso la categorie delle categorie è una entità ragionevole; tuttavia, motivazioni tecniche legate alla dimensione di una cotale struttura, limitano una tale entità a categorie "piccole", ovvero in cui gli oggetti formino un insieme e non una classe propria.
[51] La traduzione italiana del termine *sieve*, *crivello*, è poco usata e, per certi versi, fuorviante, avendo una lunga tradizione volta a denotare altri strumenti matematici nell'ambito della teoria dei numeri.
[52] Alcuni elementi, come cosa sia un sieve o cosa significhi $f^*(S)$ sono introdotti nel seguito.

Un sieve S su C è una famiglia di frecce aventi tutte lo stesso codominio C tali che, se $f \in S$, allora $f \circ g \in S$ per ogni freccia g per cui la composizione abbia senso. Inoltre se S è un sieve su C e $h: D \longrightarrow C$ è una freccia nella categoria, allora $h^*(S) = \{g | \mathrm{cod}(g) = D, h \circ g \in S\}$, ovvero la collezione di tutte le frecce aventi codominio D tali che, composte con h, stiano in S. È immediato verificare che $h^*(S)$ sia un sieve su D.

È evidente che la definizione di sito sia piuttosto tecnica e di difficile intellegibilità. Essa è stata riportata integralmente per dare un'idea diretta al lettore della "forma" che possono assumere le idee matematiche nel linguaggio corrente della disciplina. Tuttavia, possiamo formarci un'intuizione del funzionamento dell'idea di sito mostrando che ogni spazio topologico, ovvero un insieme di punti dotato di una topologia in senso classico, è anche un sito. L'idea, già usata nel caso della topologia formale, è di considerare l'insieme degli aperti con l'ordinamento derivato dall'inclusione di insiemi: non è difficile verificare che si ottiene un reticolo. Ma ogni reticolo può essere visto come una categoria: gli oggetti sono gli aperti e le frecce corrispondono alle inclusioni: se $A \subseteq B$, allora esiste una freccia, necessariamente unica, $\subseteq_{A;B}: A \longrightarrow B$. In questo modo, un sieve S sull'aperto C diviene una famiglia di sottoinsiemi aperti di C con la proprietà che, se $D \subseteq E \in S$, allora $D \in S$. In altre parole, un sieve su C che contenga un aperto E, contiene anche tutti i sottoinsiemi di E che siano aperti.

Quindi dire che il sieve S copre l'insieme C equivale a dire che C è contenuto nell'unione di tutti gli aperti di S, ovvero che C è aperto se e solo se appartiene a S. Analogamente, dire che S su C copre una freccia $f: A \longrightarrow B$, ovvero la relazione $A \subseteq B$, equivale a dire che A è contenuto nell'unione dei sottoinsiemi aperti di S. Ma queste interpretazioni dicono che le condizioni di regolarità, imposte nella definizione di topologia di Grothendieck, sono equivalenti agli assiomi di topologia classica.

Incidentalmente notiamo, come nel caso della topologia formale, che gli oggetti della categoria svolgono il ruolo di generare gli aperti, così come gli elementi dei reticoli servivano a denotare gli aperti. Ma, a differenza della topologia formale, possiamo avere relazioni tra gli aperti che siano ben più generali di un semplice ordinamento.

Senza alcun dubbio vedere un sito come uno spazio mette a dura prova l'intuizione della maggioranza dei lettori. Nonostante questo, molte delle proprietà topologiche di base possono essere utilmente estese anche ai siti, conferendo loro un aspetto molto astratto, ma pur sempre familiare. Alla fine, rispetto alle proprietà fondamentali degli spazi, i siti "funzionano" in modo molto simile ai più familiari spazi topologici, ma consentono di catturare molte più strutture matematiche, conferendo loro quindi una interpretazione spaziale che risulta di estrema utilità per capirne il significato e le proprietà.

Lo spazio dall'esterno

La complessità tecnica nella definizione di sito unita alla difficoltà di intuizione, entrambe dovute all'alto livello di astrazione, rendono di difficile manipolazione il concetto stesso. E, di conseguenza, diviene molto difficile ottenere risultati su queste strutture in modo diretto.

Per questo motivo Grothendieck sviluppò un insieme di metodi allo scopo di studiare queste strutture. Il principale strumento di analisi è il *topos*. Tecnicamente, un topos[53] è una categoria molto "regolare" che ha una struttura spaziale intrinseca. Non è intenzione di questo articolo analizzare la struttura dei topoi o darne una definizione formale[54]; il lettore interessato può trovare una introduzione ancora accessibile a un non-specialista in (Goldblatt 2006).

Quanto ci interessa fare è introdurre il principio che rende i topoi uno strumento agile e potente per analizzare i siti. In primo luogo, a questo scopo, è necessario avere una intuizione di cosa sia una categoria di fasci. L'osservazione tecnica che porta a considerare questo strumento come naturale candidato per l'analisi dei siti è che un sieve S su C è un sotto-oggetto dell'immersione di Yoneda $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-, C)$ nella categoria $[\mathbb{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$. Fuori dall'oscuro formalismo, significa che un sieve S su C può essere visto come un funtore che associa a ogni oggetto dello spazio un insieme e, a ogni freccia, una funzione tra insiemi dal codominio al dominio (si noti l'inversione di direzione). Ma un sieve S su C non può essere un funtore qualsiasi di questa forma, bensì deve essere tale per cui gli insiemi che identifica come immagini di oggetti siano sottoinsiemi delle frecce aventi come codominio C. È importante rilevare come la definizione

[53] Propriamente dovremmo dire un topos di Grothendieck, per distinguerli dalla nozione di topos elementare dovuta a Lawvere.
[54] Ci basti dire che un topos elementare è una categoria finitamente completa e co-completa, con esponenziazione e classificatore di sotto-oggetti, mentre ogni topos di Grothendieck è anche un topos elementare caratterizzato dall'essere categorialmente equivalente a un topos di fasci su un sito.

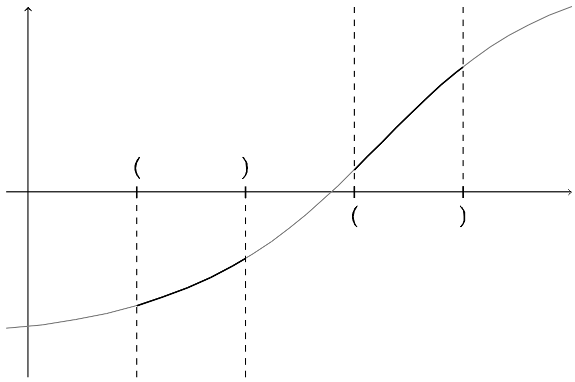

Figura 6: Una funzione vista come un fascio.

categoriale di sieve come un funtore, sia molto più agile e compatta della definizione estesa data nella precedente sezione: proprio questa agilità di notazione rende il concetto manipolabile e consente di "fare i conti".

I funtori della forma $\mathbb{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Set}$ formano una categoria le cui frecce sono le corrispondenti trasformazioni naturali. Tale categoria è indicata con $[\mathbb{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Sono detti *controvarianti* i funtori che invertono il senso delle frecce, quindi questa categoria può anche essere descritta come la categoria dei funtori controvarianti da $\mathbb{C}$ in Set. Per rimarcare lo speciale status dei suoi oggetti, i funtori in $[\mathbb{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ sono chiamati *prefasci* (*sulla categoria* $\mathbb{C}$).

La categoria $[\mathbb{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ dei prefasci è molto particolare: infatti contiene una copia di $\mathbb{C}$ al suo interno[55], ma contiene anche molti altri oggetti e frecce che non hanno un corrispondente in $\mathbb{C}$. Indipendentemente dalle proprietà categoriali di $\mathbb{C}$, la categoria dei prefasci è un topos elementare: tutte le costruzioni categoriali di base (limiti e co-limiti finiti, esponenziazione e classificazione di sotto-oggetti) sono possibili in $[\mathbb{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Per analogia con i sistemi numerici, è come lavorare con i numeri complessi invece che con i numeri interi: posso sempre effettuare le divisioni (mentre $1/2$ non è un intero); posso calcolare tutte le radici (mentre $\sqrt[3]{5}$ non è definita sugli interi); posso sapere che ogni equazione polinomiale di grado n ha esattamente n radici, mentre, nel caso intero, posso dire che vi sono al massimo n radici. In altre parole ci si muove in un mondo molto più regolare che contiene, estendendolo, il mondo di partenza e di interesse: il numero di strumenti e tecniche applicabili aumenta a dismisura, proprio in virtù della regolarità e della completezza del mondo esteso.

La definizione di prefascio tiene conto solo di metà degli ingredienti che danno luogo a un sito: la topologia non riveste alcun ruolo. Essa interviene invece nella definizione di fascio. Per chiarire il senso del concetto, possiamo prendere una qualsiasi funzione f dai numeri reali ai numeri reali. Essa genera un grafico come illustrato in figura 6. Possiamo separare il grafico in tante parti, una per ogni intervallo aperto, e considerare la struttura complessiva che si ottiene guardando tutte assieme le immagini delle funzioni su ogni aperto. Questa aggregazione di aperti, ciascuno con corredato con la corrispondente immagine della funzione, prende il nome di fascio.

La cosa diventa interessante quando si inverte il processo: definendo un pezzetto di curva per ogni intervallo aperto, globalmente, si ottiene una funzione? La risposta, in generale, è negativa, come illustrato in figura 7. Ma se i pezzetti di curva sono "coerenti" con gli aperti, allora la costruzione funziona. Ecco, intuitivamente, un prefascio è un fascio proprio quando manifesta questa coerenza con la topologia. Ovviamente la definizione matematica di fascio è astratta e piuttosto tecnica, dovendo applicarsi alla piena generalità dei siti, ma risulta comunque abbastanza semplice da esprimersi nel linguaggio delle categorie[56]. Oltre alla visione intuitiva che abbiamo fornito, ve ne è una variante da cui deriva il nome: si può immaginare la struttura degli aperti come la "base" in cui ogni elemento è un "germe" sopra cui si diparte un fascio, che comprende l'informazione che si intende rappresentare (nell'esempio, i valori della funzione) rispetto a quell'aperto. Questa visione più astratta è quella che viene generalmente presentata nei testi matematici, si veda, ad esempio, (Goldblatt 2006). Essa è applicabile direttamente anche a strutture ben più complesse di insiemi degli insiemi di valori, ed è proprio questo l'uso che Grothendieck ricercava nello sviluppare l'idea di sito.

[55] Data dai funtori di Yoneda corrispondenti agli oggetti di $\mathbb{C}$.
[56] Si riduce a richiedere l'esistenza di una speciale famiglia di equalizzatori.

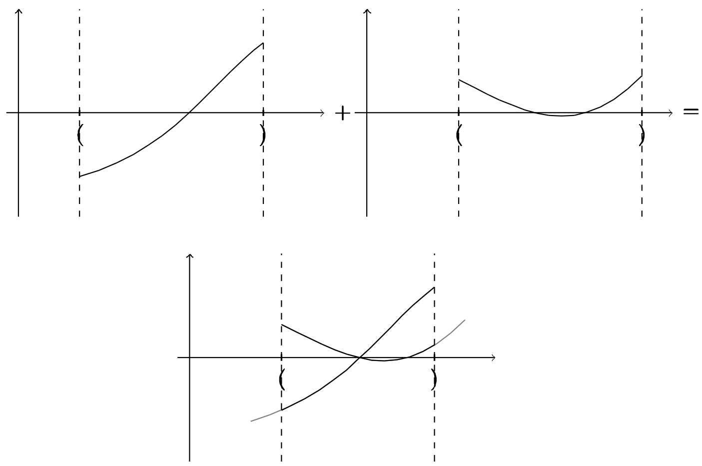

Figura 7: Un esempio di incoerenza.

Non intendiamo addentrarci ulteriormente nella teoria dei topoi di Grothendieck, ovvero nella analisi delle categorie i cui oggetti siano i fasci e le cui frecce le corrispondenti trasformazioni naturali. Ci basti dire che è estremamente profonda e complessa, ricca di risultati ampi e profondi, ispiratrice di molti degli sviluppi e dei risultati più eclatanti nella ricerca matematica degli ultimi anni, come la dimostrazione della congettura di Poincaré (O'Shea 2007) o dell'ultimo teorema di Fermat (Aczel 1998).

Nonostante l'incompletezza e la superficialità della presentazione, gli elementi introdotti consentono di capire il senso generale dell'approccio: dato uno spazio modellato come un sito, posso estenderlo in una struttura molto più ampia, ricca ed estremamente regolare, il corrispondente topos di Grothendieck, cioè la categoria dei fasci su quel sito. Quindi, il sito viene studiato "dall'esterno" come una piccola ma interessante sotto-parte di una struttura estremamente ricca in cui si hanno a disposizione strumenti molto potenti e molto astratti per dimostrare proprietà e teoremi.

Conclusione

Ripercorrendo idealmente questo articolo a volo d'uccello, si nota come, nel corso del tempo la nozione di spazio si sia via via allontanata dalla idealizzazione di quanto percepiamo nel mondo fisico. Questo processo è stato favorito dalla necessità di allargare l'intuizione spaziale a problemi o situazioni che avevano un sentore geometrico ma che, però, non era esprimibile con i mezzi disponibili al tempo. Il culmine di questo processo, almeno per il momento[57], è l'idea di spazio implicita nei siti e studiata attraverso gli occhiali dei topoi di Grothendieck.

Lungo una linea differente, lo spazio euclideo era uno strumento di calcolo in sé che è stato sostituito dapprima con l'algebra concreta, poi dal calcolo infinitesimale dell'analisi, poi dall'algebra astratta, e infine, dalla teoria delle categorie. Quindi la storia del concetto di spazio è anche una storia degli strumenti concettuali di calcolo e di dimostrazione che, speriamo, almeno parzialmente, di aver reso.

Infine, ed era lo scopo primo nella scrittura del presente lavoro, ci auguriamo che il lettore che abbia avuto l'attenzione e la cortesia di seguire il filo del discorso fino a questo punto, possa aver apprezzato come la Matematica sia una storia di idee e una disciplina in costante sviluppo in cui le nozioni fondamentali sono ancora oggi oggetto di critica, analisi e approfondimento, e non date aprioristicamente per acquisite.

Avvertenze

- L'autore è un matematico, non un filosofo o uno storico, pertanto, non avendo la pretesa di invadere un territorio in cui la sua competenza è di necessità limitata, ha preferito usare riferimenti generali e ben noti, piuttosto che fare una ricerca accurata delle fonti. Sicuramente sarebbe possibile citare o richiamare i lavori di studiosi ben più titolati, e certamente molti dibattiti o opinioni sono state trascurate. Questo aspetto, che può infastidire il lettore

[57] In realtà, già superato rispetto ad alcune generalizzazioni tecniche, ma non ancora nella sostanza concettuale.

storico o filosofo, è frutto di una scelta deliberata: cercare di rendere il lavoro accessibile anche a un profano che sia interessato a meglio comprendere le parti più astratte della matematica contemporanea, almeno a un livello intuitivo.

- Per esporre quanto necessario serve usare il linguaggio matematico: per mantenere il livello di comprensione adeguato a un pubblico non specialistico, specie nella parte finale, si è spesso scelto di sacrificare la precisione e la generalità in favore dell'intuizione. In questo senso il lettore matematico potrà storcere il naso per l'uso non sempre rigoroso dei concetti: questo articolo non vuole essere una introduzione allo studio degli spazi matematici, ma piuttosto una sorta di mappa concettuale attraverso le varie nozioni che via via hanno dato corpo a questo concetto, tentando di mostrare come vi sia una sorta di principio unificante che le lega.

Inoltre, occorre dare una avvertenza sulla bibliografia: essa è stata selezionata come un insieme di testi che siano, mediamente, accessibili anche a un lettore non specializzato. Spesso, invece dell'edizione originale, che talora è introvabile, si è preferito indicare un libro che sia presente in una buona biblioteca o che si possa acquistare presso i normali canali distributivi.

Ringraziamenti

Questo lavoro è stato reso possibile da una Marie Curie Intra European Fellowship, grant n. PIEF-GA-2010-271926, *Predicative Theories and Grothendieck Toposes*, all'interno del Settimo Programma Quadro della Comunità Europea di cui l'autore usufruisce.

Si ringrazia il Dr. Federico Gobbo per gli utili consigli su una versione preliminare.

Le figure in questo articolo sono state generate in LaTeX grazie al package TikZ: le figure 3 e 4 sono state adattate da esempi tratti dal sito web `http://www.texample.net/tikz/examples/`.

Bibliografia

Abramsky, Samson, e Achim Jung. "Domain Theory." In *Handbook of Logic in Computer Science. III.*, di Samson Abramsky, Dov M. Gabbay e T.S.E. Maibaum. Oxford University Press, 1994.

Aczel, Amir D. *L'enigma di Fermat.* Il Saggiatore, 1998.

Bonola, Roberto. *Non-Euclidean Geometry.* Open Court, 1912.

Boyer, Carl B. *A History of Mathematics.* II. Wiley, 1991.

Cantor, Georg. *Sur Les Fondements de la Théorie del Ensembles Transfinis.* Jacques Gabay, 1989.

Cohen, Paul J. *Set Theory and the Continuum Hypothesis.* Dover, 2008.

Conway, John H., e Richard K. Guy. *The Book of Numbers.* Copernicus, 1996.

Courant, Richard, e Herbert Robbins. *Che cos'è la Matematica?* Boringhieri, 1971.

Cox, David, John Little, e Donal O'Shea. *Ideals, Varieties and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra.* III vol. Springer, 2007.

Derbyshire, John. *Unknown Quantity: A Real and Imaginary History of Algebra.* Penguin, 2006.

Doxiadis, Apostolos, and Christos H. Papadimitriou. *Logicomix.* Guanda, 2009.

Euclide. *The Thirteen Books of The Elements: Volume 1: Books 1 and 2.* IIa ed. Dover, 2000.

—. *The Thirteen Books of The Elements: Volume 2: Books 3 to 9.* IIa ed. Dover, 2000.

—. *The Thirteen Books of The Elements: Volume 3: Books 10 to 13.* II ed. Dover, 2000.

Goldblatt, Robert. *Topoi: the Categorical Analysis of Logic.* Dover, 2006.

Heath, T.L. *The Works of Archimedes: Edited in Modern Notation with Introductory Chapters.* Cambridge University Press, 2009.

Jackson, Allyn. "Comme appelé du néant—as if summoned from the void: The life of Alexandre Grothendieck." *Notices of the AMS* 51, no. 9 (2004): 1038-1056.

Jackson, Allyn. "Comme appelé du néant—as if summoned from the void: The life of Alexandre Grothendieck." *Notices of the AMS* 51, no. 10 (2004): 1196-1212.

Jacob, Billl. *Linear Algebra.* W.H. Freeman and Co., 1990.

Klein, Felix. *Vergleichende betrachtungen über neuere geometrische forschungen.* 1872.

Kline, Morris. *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times.* Oxford University Press, 1972.

Lawvere, F.W., and Schanuel. *Teoria delle Categorie: un'introduzione alla Matematica.* Franco Muzzio, 1994.

Munkres, James. *Topology.* II ed. Prentice Hall, 2000.

Osenda, Davide. *Ultima lezione a Gottinga.* 001 Edizioni, 2009.

O'Shea, Donal. *La Congettura di Poincaré.* Rizzoli, 2007.

Riemann, Bernhard. *Ueber die hypothesen, welche der geometrie zu grunde liegen.* 1854.

Sambin, Giovanni. "Some points in formal topology." *Theoretical Computer Science* 305, no. 1-3 (agosto 2003): 347-408.

Simmons, George F. *Calculus with Analytic Geometry.* II ed. McGraw-Hill, 1996.

Sutherland, Wilson A. *Introduction to Metric and Topological Spaces.* II. Oxford University Press, 2009.